kPH
WIEN/KREMS

Petra HAUER-TYPPELT

DER ZUFALL UND DIE MATHEMATIK

ANTRITTSVORLESUNGEN AN DER KPH WIEN/KREMS: BAND 5

REIHE ANTRITTSVORLESUNGEN AN DER KPH, BAND 5

Petra Hauer-Typpelt

Der Zufall und die Mathematik

Reihe: Antrittsvorlesungen an der KPH Wien/Krems, Band 4

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detallierte bibliografische Daten sind unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN: 978-3-904046-04-6

IMPRESSUM

Kirchliche Pädagogische Hochschule Wien/Krems
Herausgeber: Rektorat der KPH Wien/Krems
Redaktion: Thomas Handschuh, Thomas Krobath, Doris Lindner

Layout/Satz/Grafik: Karin Gratiana Wurm
Druck: DRUCKEREI FUCHS, 2100 Korneuburg

Wien/Krems 2020 (1. Auflage Dezember 2020)

Vorwort

Bereits seit einigen Jahren führt die Kirchliche Pädagogische Hochschule Wien/Krems konsequent Antrittsvorlesungen für neu eingerichtete ph1-Professuren durch und übernimmt somit ein der universitären Tradition entlehntes Format des akademischen „Dienstantritts“. Dieser Band steht im Zeichen der Professur „Mathematikdidaktik der Sekundarstufe“.

Eine zentrale Aufgabe der Mathematikdidaktik besteht darin, das schulbezogene Lehren und Lernen von Mathematik in allen Altersstufen im Sinne der Qualitätsentwicklung zu verbessern und durch Forschungsleistungen weiterzuentwickeln. Gerade in der Mathematik haben veränderte gesellschaftliche Rahmenbedingungen eine Neubestimmung des Schulfaches erforderlich gemacht. Besonders die Kompetenzorientierung sowie die rasch voranschreitende Technologisierung des Alltags veränderten die Relevanz und Gestaltung des Mathematikunterrichts nachhaltig.

Es scheint bemerkenswert, dass die Fragen nach der Qualität an Österreichs Schulen sich überproportional häufig am Fach Mathematik festzumachen scheinen, und dass die Frage nach dem Anteil von Mathematik an Allgemeinbildung oft gestellt wird. Warum ist es für die und den Einzelnen und die Gesellschaft wichtig, dass jede Schülerin und jeder Schüler daran teilnimmt? Warum andererseits bleibt laut zahlreicher Studien Mathematik das Angstfach Nummer 1 bei Österreichs Schülerinnen und Schülern? Warum steht die Lehrperson als entscheidende Einflussgröße bei Mathematik derart auf dem Prüfstand? Und warum wird die Zentralmatura gerade im Fach Mathematik so heftig diskutiert?

Die Relevanz einer Professur für Mathematikdidaktik der Sekundarstufe beantwortet sich angesichts dieser Fragestellungen von selbst. Hochschulprofessorin Dr.in Petra Hauer-Typpelt findet angesichts der multiplen Anforderungen und Desiderate ein breites Betätigungsfeld, welches es zu strukturieren und systematisch zu bearbeiten gilt.

Christoph Berger
Rektor der KPH Wien/Krems

Andreas Weissenbäck
Vizerektor für Lehre

Der Zufall und die Mathematik

1. Die Ambivalenz des Begriffs Zufall im alltäglichen Sprachgebrauch

Der Begriff Zufall wird von Menschen seit jeher durchaus unterschiedlich verstanden und verwendet. Manche lassen ihn als Erklärung für verschiedene Phänomene gelten, andere halten ihn schon als Erklärungsansatz für ungeeignet. Werfen wir zum Einstieg den Blick auf einige ausgewählte historische Zitate:

„Zufälle sind unvorhergesehene Ereignisse, die einen Sinn haben."
Diogenes von Sinope (um 350 v. Chr.), griechischer Philosoph

„Kein Sieger glaubt an den Zufall."
Friedrich Wilhelm Nietzsche (1844-1900), Philosoph und Schriftsteller

„Auf den Zufall bauen ist Torheit, den Zufall benutzen ist Klugheit."
Unbekannt

„Auch der Zufall ist nicht unergründlich, er hat seine Regelmäßigkeiten."
Novalis (1772-1801), deutscher Schriftsteller

Schon diese vier Zitate zeigen, welch unterschiedliche Aspekte dem Begriff Zufall im Alltagssprachgebrauch innewohnen können. Im Zitat von Diogenes wird der Aspekt des „Unvorhersehbaren", das aber Sinn hat, aufgegriffen. Hier wird also der Glaube an die Existenz des Zufalls und auch an seine Bedeutung für das Leben betont. Im Gegensatz dazu, drückt das Zitat von Nietzsche aus, dass an den Zufall zu glauben, etwas für Verlierer sei. Dass die Existenz des Zufalls und sein Einfluss auf das eigene Leben also nur gegeben sei, wenn man dieses nicht selbst in die Hand nehme, sondern Dinge einfach geschehen ließe. Das dritte oben angeführte Zitat geht hingegen wieder ganz klar von der Existenz und dem Einfluss des Zufalls aus. Ohne weiter auszuführen, was er eigentlich bedeutet, wird das Benutzen des Zufalls als klug bewertet. Die letzte, Novalis zugeschriebene Aussage, ist eines der wenigen Zitate zum Begriff, das nicht mehr oder weniger von seiner Unergründlichkeit ausgeht. Im Gegenteil, diese wird dementiert und die Regelmäßigkeit des Zufalls in den Fokus gerückt. Damit nähern wir uns der Bedeutung des Zufallsbegriffs in der Mathematik bereits an.

Bevor darauf eingegangen wird, bitte ich Sie, liebe Leserinnen und Leser, folgende Frage für sich zu beantworten:

Wann verwenden Sie in Ihrem Alltagssprachgebrauch die Begriffe „Zufall“ oder „zufällig“?

Wie durch verschiedenen Studien bestätigt (vgl. z.B. Tietze et al. 2002, S. 146), werden „Zufall“ bzw. „zufällig“ im alltäglichen Sprachgebrauch häufig im Zusammenhang mit seltenen Ereignissen verwendet. Mit der Frage, „Weißt du, wen ich heute zufällig getroffen habe?“, wird tendenziell eher nach Personen gefragt, die man nur selten sieht. Mit der Aussage „So ein Zufall.“ wird häufig ausgedrückt, dass ein eher selten auftretendes Ereignis mit einem besonderen Umstand zusammentrifft oder zumindest ein außergewöhnliches Zusammentreffen von Ereignissen auftritt.

Ganz anders verwenden wir hingegen den Zufall, wenn wir so genannte Zufallsexperimente[1] zur Entscheidungsfindung verwenden. Etwa wenn der Münzwurf entscheidet, welche der beiden Mannschaften beim Fußball den Anstoß hat. Dabei verwenden wir viel mehr die Sichtweise der Mathematik auf den „Zufall“: Es geht mitnichten (nur) um seltene Ereignisse, sondern um Ereignisse, deren Eintreten zwar im Einzelfall nicht vorhergesagt werden kann, für deren Eintreten auf lange Sicht hingegen, im Sinne der wiederholten Durchführung, sich sehr wohl Aussagen machen lassen. Im konkreten Fall des Münzwurfes nutzen wir die gleiche Wahrscheinlichkeit für beide Versuchsausgänge und die sich daraus ergebende angestrebte „gerechte“ Entscheidung.

Wahrscheinlichkeit und Zufall sind zwei untrennbare Basis-Begriffe der Stochastik. Der Oberbegriff Stochastik fasst die beiden Fachgebiete Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie, die Lehre der Gesetzmäßigkeiten des Zufalls, zusammen. Nehmen wir nun also den Begriff „Zufall“ aus fachlicher Sicht in den Fokus.

1 Auf diesen zentralen Begriff wird im folgenden Abschnitt genauer eingegangen.

2. Der Begriff Zufall in der Mathematik

2.1 Unauffällige Fachwörter und die Rolle der Intuition beim Mathematiklernen

Die spezifische Sprache und Arbeitsweise der Mathematik zeichnet sich (unter anderem) durch Exaktheit aus. Daher ist es ein wesentliches Merkmal des mathematischen Arbeitens, Begriffe zu definieren, d.h. diese exakt festzulegen. Handelt es sich um Fachwörter mit ausschließlich innermathematischer Bedeutung sind sie als solche leicht zu erkennen. Wir haben es aber auch mit einem hohen Anteil an disziplin-spezifischen Fachwörtern zu tun, die ebenso im deutschen Grundwortschatz eine Bedeutung haben. Guckelsberger und Schacht sprechen in diesem Zusammenhang von „unauffälligen Fachwörtern" (Guckelsberger & Schacht 2018, S. 31). Gerade im Bereich Stochastik gibt es dafür eine Fülle von Beispielen, wie die Begriffe „Ereignis", „wahrscheinlich", „Erwartungswert", „bedingt" oder eben den im Zentrum dieses Artikels stehenden Begriff „Zufall". Letzterem wohnt darüber hinaus eine weitere Besonderheit inne: Für ihn gibt es keine Begriffsdefinition im disziplin-spezifischen, üblichen Sinn. Es besteht daher eine besondere Gefahr des sogenannten „Scheinverstehens", daher bedarf es eines expliziten Thematisierens der unterschiedlichen Begriffsbedeutungen und einer klaren Abgrenzung vom Alltagssprachgebrauch.

Tietze schlägt basierend auf einer Zusammenstellung von Zugängen zum Konzept Zufall in der Fachliteratur vor, ein Ereignis dann als zufällig zu bezeichnen, wenn es eintreten kann aber nicht eintreten muss (Tietze et al. 2002, S. 148f.). Mit dieser sehr allgemein gehaltenen Festlegung lassen sich allerdings Probleme, die sich aus der Überlappung mit dem Begriffsverständnis aus der Alltagssprache ergeben, nur bedingt lösen. Denn Kinder bzw. Jugendliche bauen intuitive Zugänge zum Begriff Zufall auf, lange bevor im Rahmen des Mathematikunterrichts damit gearbeitet wird. Das gilt natürlich nicht nur für den Begriff Zufall, sondern auch für alle anderen Fachbegriffe, die im alltäglichen Sprachgebrauch verwendet werden.

Intuition ist für jegliches Lernen von wesentlicher Bedeutung. Gerade beim Mathematiklernen wird dies aber oftmals unterschätzt.
Lassen Sie uns, bevor näher darauf eingegangen wird, noch einmal ein kurzes Gedankenexperiment durchführen:
Welche Vorstellungen verbinden Sie unmittelbar mit den folgenden Größenangaben?

300 km $\frac{1}{4}$ Liter

Die Antwort auf die Längenangabe ist vermutlich davon abhängig, wo Sie wohnen oder welche Strecken Sie oft zurücklegen und zum Vergleich heranziehen. Intuitiv verwenden wir oft unser individuelles Maß, um uns Größenvorstellungen zu erleichtern. Beispielsweise ist es für Ost-Österreicher oft die Strecke Wien-Salzburg, die als individuelles Maß für 300 km herangezogen wird. Ähnlich wird es sich wohl mit Ihren Vorstellungen zu $\frac{1}{4}$ Liter verhalten.

Intuition meint die unmittelbare Vorstellung oder Einschätzung, die sich bei Konfrontation mit einem Sachverhalt einstellt. Ist diese passend und steht insbesondere nicht im Widerspruch zum tatsächlichen Sachverhalt, unterstützt sie Lernprozesse, andernfalls behindert sie diese. Es gilt also zu Beginn des Lernprozesses die sogenannte Primärintuition zu prüfen, die in der Regel auf (außerschulischen) Vorerfahrungen beruht. Im Idealfall ist diese angemessen und lässt sich problemlos mit fachlichen Inhalten und formalen Konzepten verbinden. Ist dies nicht der Fall, so gilt es durch systematische Auseinandersetzung mit den Inhalten und Konzepten das Herausbilden einer angemessenen sogenannten Sekundärintuition in den Fokus zu nehmen. Für die Begriffe „Zufall“ und „wahrscheinlich“ sind solch unangemessene Primärintuitionen wegen der eingangs thematisierten Überlappung mit der Alltagssprache oftmals gegeben und stehen daher nicht selten erfolgreichen Lernprozessen im Wege.

Ein klassisches Beispiel dafür ist der Tipp 1, 2, 3, 4, 5, 6 beim Zahlenlotto 6 aus 45. Danach gefragt, ob sie diesen Tipp abgeben würden, wird dies von der überwiegenden Mehrheit der Lernenden rigoros abgelehnt. Die Einsicht zu erreichen, dass dieser Tipp sich nicht durch seine Wahrscheinlichkeit, mit der dieses „schöne Muster“ tatsächlich gezogen wird, von allen anderen Tipps unterscheidet, ist eine typische Situation für Lehrende, in der es darum geht, unangemessene Primärintuitionen in angemessene Sekundärintuitionen überzuführen. Oft zeigt sich gerade an Beispielen wie diesen, dass kognitive Einsicht und angemessene Intuition nicht zwingend miteinander einhergehen. Kommentare wie, „Ich verstehe jetzt, dass der Tipp gleich wahrscheinlich wie jeder andere ist, würde aber trotzdem eher jeden anderen Tipp abgeben.“ [2], zeigen die Diskrepanz auf.

Das Entwickeln angemessener Sekundärintuitionen ist ein Lernprozess, der viel Zeit beansprucht. Daher ist dem Aufbau adäquater Vorstellungen zu Basis-Begriffen möglichst frühzeitig im Mathematikunterricht Raum zu geben.

2.2 *Aufbau adäquater Vorstellungen zum Begriff Zufall*

Eine klassische, bewährte Vorgangsweise ist die Arbeit mit Zufallsexperimenten. Darunter versteht man Experimente, bei denen ein bestimmtes, beobachtetes Ereignis eintreten kann, aber nicht eintreten muss. Das Eintreten des Ereignisses ist also nicht vorhersehbar.

Klassische Beispiele für solche Zufallsexperimente sind der bereits angesprochene Münzwurf, das Würfeln und das Ziehen aus einem Behälter. Auch technologieunterstützt, etwa durch Arbeit mit dem Zufallszahlengenerator und/oder darauf basierender Simulation von Datenmaterial, können künstliche stochastische Situationen[3] erzeugt werden. Der wesentliche Punkt dabei ist, die Aufmerksamkeit der Lernenden vom Einzelergebnis auf die langfristigen Ergebnisse zu verlagern, damit einsichtig werden kann, dass der Zufall zwar immer im Spiel ist, sich auf lange Sicht dennoch Regelmäßigkeiten erkennen lassen. Letztlich wird damit das Empirische Gesetz der großen Zahlen herausgearbeitet, das ebenfalls einen besonderen Stellenwert in der Mathematik einnimmt. Denn es erfährt seine Berechtigung nicht, wie disziplin-spezifisch üblich, durch einen Beweis, sondern, wie der Name schon sagt, durch Erfahrung.

2 Zuzustimmen ist dieser Aussage nur unter dem Aspekt, dass ein Tipp mit Muster grundsätzlich vermieden werden sollte. Denn es ist wahrscheinlicher als bei einem Tipp ohne Muster, dass eine weitere Person diesen Tipp gewählt hat, mit der dann ein etwaiger Gewinn zu teilen wäre.

3 Damit sind Situationen gemeint, in denen unter Unsicherheit bewertet und/oder entschieden werden muss.

Empirisches Gesetz der großen Zahlen:
Die relative Häufigkeit eines Ereignisses pendelt sich bei großer Versuchsanzahl und gleich bleibenden Versuchsbedingungen bei einem bestimmten Wert ein.

Richard von Mises[4] hat versucht, diese Aussage durch eine Grenzwertdefinition zu exaktifizieren und damit auch den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ zu definieren. Eine solche analytische Grenzwertdefinition ist aber nicht haltbar, da die damit einhergehende geforderte Konvergenz nicht garantiert werden kann. Denn theoretisch, wenn auch unwahrscheinlich, kann beispielsweise auch eine Münze beliebig oft auf ein und dieselbe Seite fallen. Außerdem wohnt dem Grenzwert per se das Konzept „*n* gegen unendlich“ inne, dabei meint *n* die Anzahl der durchgeführten Versuche. Ein Zufallsversuch kann aber in der Realität nicht unendlich oft durchgeführt werden.

Das empirische Gesetz der großen Zahlen führt auf den frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff: Wahrscheinlichkeiten werden aus relativen Häufigkeiten einer sehr großen Versuchsanzahl gewonnen. Eine große Anzahl an Ergebnissen aus der Vergangenheit führt also zu Prognosewerten für die Zukunft. So wird beispielsweise die Wahrscheinlichkeit für den Erfolg einer gewissen Operationstechnik aus dem Beobachten des Auftretens von Erfolg und Misserfolg bei einer sehr großen Anzahl von vorangegangenen Operationen ermittelt. Auf ebensolche Weise werden auch Aussagen zu Heilungschancen bei Krankheiten oder Nebenwirkungen von Medikamenten gewonnen.

Wesentlich dabei ist auch, das andere Ende der Fahnenstange richtig einzuordnen: Was bedeutet es für den einzelnen Patient, zu hören, dass eine gewisse Medikamententherapie mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% den gewünschten Erfolg bringt? Damit liegt eine Chanceneinschätzung vor, dennoch gibt es im Einzelfall nur ein „Entweder – Oder“: Entweder Erfolg oder Misserfolg. Und dies ist klarerweise genauso gegeben, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit einen anderen Wert aufweist. Wesentlich mehr Relevanz hat der Wert für eine Klinik, in der mit dieser Therapie gearbeitet wird. Denn diese kann in einer ersten, sehr groben Punktschätzung prognostizieren, dass sich von beispielsweise 5000 so behandelten Patienten bei etwa 4500 der gewünschte Erfolg einstellen wird. Mit solch groben und damit äußerst unsicheren Schätzungen gibt man sich natürlich nicht zufrieden. Fundierte Vorausberechnungen führen zu sogenannten Konfidenzintervallen, die, behaftet mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit, eine Abschätzung des Grades der Sicherheit der Intervallschätzung mit sich bringen.

Wirklich relevant werden also Wahrscheinlichkeitsangaben erst „für große n“, d.h. eine große Anzahl von Versuchen.
Dies gilt für beide Richtungen: Einerseits braucht es eine große Anzahl von Versuchen, um aus relativen Häufigkeiten Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen, andererseits werden Wahrscheinlichkeiten zur Prognose erst für eine große Anzahl von Versuchen wirklich relevant. Denn im Einzelfall sind und bleiben wir dem Zufall ausgeliefert.

Wir sind aber nicht nur dem Zufall ausgeliefert, sondern machen uns diesen auch zunutze. Ein ganzer Wirtschaftszweig, das Glücksspielwesen, erwirtschaftet Riesengewinne, indem es

4 Österreichisch-US-amerikanischer Mathematiker, 1883 – 1953

die Gesetzmäßigkeiten des Zufalls auf lange Sicht für sich nutzt. Mag ein einzelner Spieler, abhängig vom Zufall, auch hie und da hoch gewinnen, so gewinnt auf alle Spiele in Summe bezogen, also als eine große Anzahl von ein und demselben Zufallsexperiment betrachtet, immer der Betreiber des jeweiligen Spiels.

Auch seriös durchgeführte Umfragen, sollten den Charakter von Zufallsexperimenten haben. Das heißt, es sind Faktoren auszuschließen, welche die Antworten vorab determinieren. Aus Sicht der Befrager handelt es sich bei jeder einzelnen Antwort um den Ausgang eines Zufallsexperiments. Nur dann können Umfrageergebnisse tatsächlich als Grundlage, etwa für Wahlprognosen, verwendet werden. Dabei kommen ebenso die oben kurz angesprochenen Methoden der schließenden Statistik ins Spiel, um zur vorab gewählten Irrtumswahrscheinlichkeit Konfidenzintervalle anzugeben.

Im Folgenden wird eine Umfragetechnik vorgestellt, die sich den Zufall zunutze macht, um ehrliche Antworten auch auf heikle Fragen zu erhalten.

3. Randomized Response Technik (Methode der Zufallsantworten)

3.1 Die Problemstellung

Umfragen werden zu den verschiedensten Themengebieten durchgeführt und immer ist es ein vorrangiges Anliegen, ehrliche Antworten von den Befragten zu erhalten, um den Wert der Umfrageergebnisse zu sichern. Besonders wenn es im Bereich der empirischen Sozialforschung um heikle oder zumindest als peinlich empfundene Fragen geht, muss man davon ausgehen, dass auch nicht wahrheitsgemäße Antworten im Spiel sind, die das Umfrageergebnis deutlich verzerren. Beispiele dafür sind Fragen folgender Art:

- Umfrage unter Sportlern: Haben Sie schon einmal eine verbotene, leistungssteigernde Substanz eingenommen?
- Umfrage unter den Schülern einer Schule: Hast du schon einmal absichtlich eine Mitschülerin oder einen Mitschüler gemobbt?
- Werden Sie bei der kommenden Wahl die extremistische Partei XY wählen?
- Haben Sie schon einmal wissentlich nicht wahrheitsgemäße Angaben bei der Steuererklärung gemacht?

Die Problemstellung liegt auf der Hand: Wie erhält man ehrliche Antworten auf sensitive Fragen? Z. B. wenn nach sozial nicht erwünschtem, möglicherweise sogar widerrechtlichem Verhalten oder zum privaten Bereich gefragt wird. Wahrheitsgemäße Antworten auf solch sensitive Fragen erfordern hohes Vertrauen in die Anonymität der Umfrage.

Darin liegt daher auch der Ansatzpunkt der Randomized Response Technique (RRT), die erstmals von Warner vorgeschlagen wurde. (vgl. Warner 1965)
Das Ziel dieser Technik ist es, durch Randomisieren der Antwort, der befragten Person zu garantieren, dass ihre Antwort anonym bleibt.

3.2 Randomisieren der Antwort

Der Beantwortung der Frage wird ein Zufallsexperiment vorgespannt. Dessen Ausgang entscheidet,

- ob die Frage wahrheitsgemäß beantwortet wird oder
- ob die Frage jedenfalls mit Ja beantwortet wird.

Essentiell dabei ist, dass der Ausgang des Zufallsexperiments ausschließlich der befragten Person bekannt ist. Der Fragesteller weiß also nicht, ob ein Ja auf die Frage eine wahrheitsgemäße Antwort oder durch den Ausgang des Zufallsexperiments bedingt ist. In diesem Sinn also ist die Antwort als „randomisiert“ zu betrachten. Diese grundsätzliche Vorgangsweise wird nun zunächst anhand eines konkreten Beispiels dargelegt.

3.3 Die grundsätzliche Vorgangsweise der RRT anhand eines konkreten Beispiels

Anhand unserer Frage soll Licht in die Dunkelziffer des Kokainkonsums innerhalb einer bestimmten Berufs- oder Altersgruppe gebracht werden.
Die Frage lautet daher: „Haben Sie schon einmal Kokain konsumiert?"
Eine typisch sensitive Frage also, die im Fall des Falles von vielen wohl nur unter sehr hohem Vertrauen in die Anonymität der Antwort wahrheitsgemäß beantwortet wird.
Vor der Antwort auf die Frage wird das Zufallsexperiment „Würfeln mit einem fairen Würfel" durchgeführt und den befragten Personen folgende Vorgabe gemacht:

- Ist Ihre gewürfelt Augenzahl 5 oder 6, dann antworten Sie jedenfalls mit Ja, egal ob das stimmt.
- Ist Ihre gewürfelte Augenzahl 1,2,3 oder 4, dann antworten Sie wahrheitsgemäß.

Nur die befragte Person kennt ihr Würfelergebnis! Damit hat sie Gewissheit, dass bei einem Ja von ihrer Seite niemand nachvollziehen kann, ob es sich um eine dem Zufallsexperiment geschuldete oder eine ehrliche Antwort handelt. Das Vertrauen in die Anonymität der Befragung ist damit um ein Vielfaches gesteigert.

Mit Hilfe der Laplace-Wahrscheinlichkeit lässt sich leicht überlegen, dass mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ die Antwort jedenfalls Ja lauten wird, unabhängig von ihrem Wahrheitsgehalt[5]. Dementsprechend kommen nur rund $\frac{2}{3}$ der Befragten in die Situation der echten Befragung. Von diesen Personen wird ein unbekannter Anteil, den wir mit r bezeichnen, wahrheitsgemäß mit Ja antworten. Wir stellen diese Situation übersichtlich in einem Baumdiagramm dar (vgl. Abbildung 1).

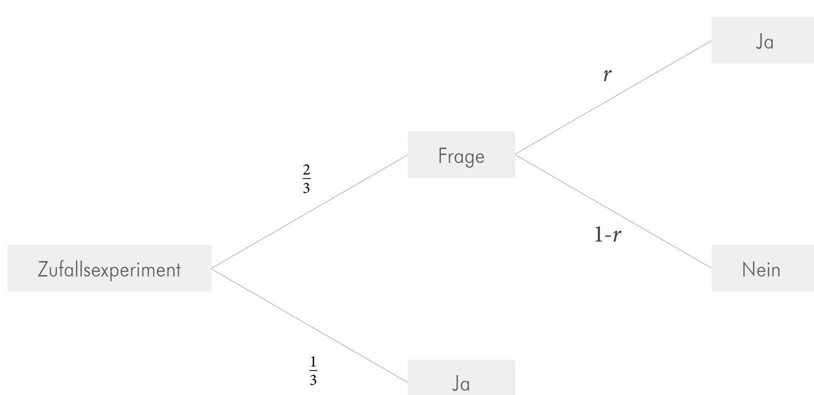

Abbildung 1: Baumdiagramm zur Ausgangssituation der Umfrage „Kokainkonsum": Randomisieren der Antwort

Abbildung 1 zeigt auf einen Blick, dass ein Teil der Ja-Antworten nicht ernst zu nehmen ist, da er dem Ergebnis des vorgespannten Zufallsexperiments zugeschrieben werden muss. Dieser Anteil kann aber herausgerechnet werden. In den verbleibenden Teil der Ja-Antworten kann dafür hohes Vertrauen gesetzt werden. Zu bestimmen ist der Anteil r, also der Anteil der wahrheitsgemäßen Antworten.

5 Da es zwei günstige und sechs mögliche Versuchsausgänge für das Ereignis „Die Antwortet lautet jedenfalls Ja." gibt.

In einem ersten Schritt dazu, wird die Situation mit einer konkreten Anzahl von $n = 6000$ befragten Personen analysiert. Angenommen von diesen 6000 Personen antworten 2360 mit Ja. In Abbildung 2 ist diese Situation durch ein Baumdiagramm dargestellt.

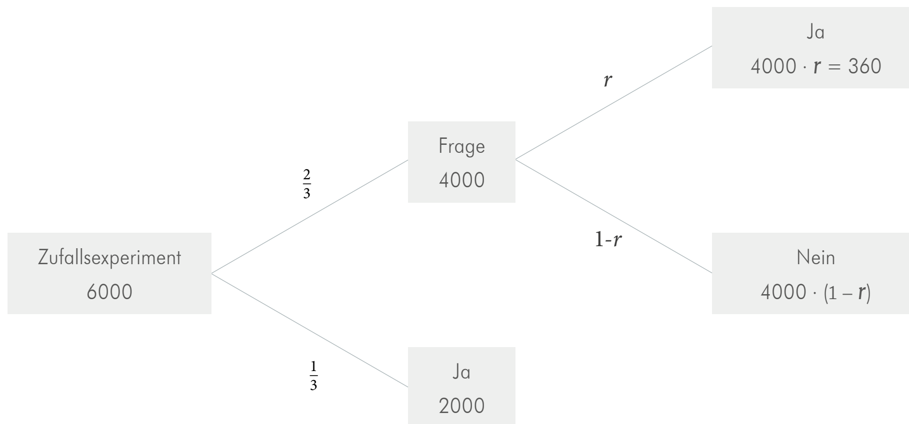

Abbildung 2: Baumdiagram zur Umfrage „Kokainkonsum“ mit n=6000 Befragten und 2360 Ja-Antworten

Rund $\frac{1}{3}$ der 6000 Befragten antwortet jedenfalls mit Ja, das sind im konkreten Fall rund 2000 Personen[6]. Diese rund 2000 Ja-Antworten müssen von der Gesamtzahl der Ja-Antworten abgezogen werden, es bleiben also 360 wahrheitsgemäße Ja-Antworten über. Diese stammen aus einer Grundmenge von jenen rund 4000 Personen, die entweder die Augenzahl 1,2,3, oder 4 gewürfelt haben. Damit erhalten wir für den Anteil r an Personen, die wahrheitsgemäß angeben, schon einmal Kokain konsumiert zu haben: $r = \frac{360}{4000} = 0{,}09$.

Durch das vorgespannte Zufallsexperiment wird also einerseits die Antwort randomisiert, was den gewünschten Effekt bewirkt, das Vertrauen in die Anonymität zu steigern. Andererseits wird dadurch aber die Grundmenge der befragten Personen von 6000 auf rund 4000 reduziert.

6 In Abschnitt 3.5 wird auf Überlegungen zur Genauigkeit der Werte eingegangen.

3.4 RRT Verallgemeinerung zu beliebiger Umfrage

Das adaptierte Baumdiagramm für eine beliebige Umfrage mit n Befragten und mit einem beliebigen vorgespannten Zufallsexperiment zeigt Abbildung 3.

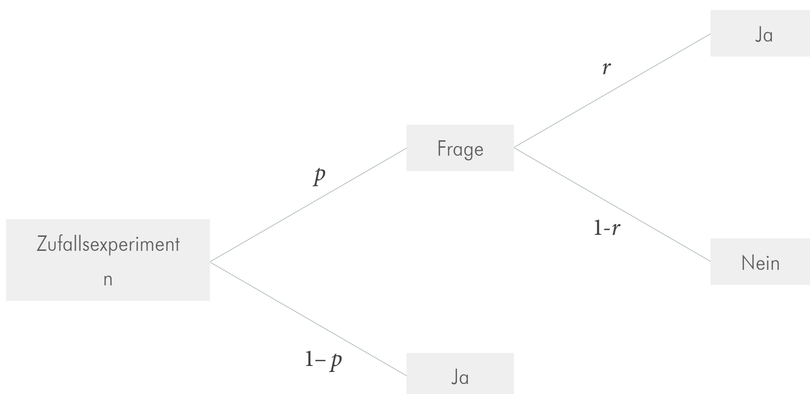

Abbildung 3: Baumdiagramm zu beliebiger Umfrage mit beliebigem Zufallsexperiment zur Randomisierung der Antwort

Die Wahrscheinlichkeit, mit der das Zufallsexperiment zur wahrheitsgemäßen Beantwortung der Frage weiterleitet, bezeichnen wir mit p. Dementsprechend erhält man mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ jedenfalls eine Ja-Antwort. Von allen Personen, die wahrheitsgemäß antworten, antwortet ein Anteil, den wir mit r bezeichnen, mit Ja. Diesen Anteil r gilt es zu ermitteln.

Für die Gesamtanzahl J aller Ja-Antworten ist zu erwarten:

$$J = n \cdot p \cdot r + n \cdot (1 - p)$$

und damit für den gesuchten Anteil $r = \frac{J}{n \cdot p} - \frac{1}{p} + 1$.

Auf diese Weise lässt sich also für alle Befragungen des Umfanges n ein Schätzwert für den Anteil jener Personen ermitteln, die wahrheitsgemäß mit Ja antworten.

Selbstverständlich lässt sich die hier vorgestellte Grundstruktur der Randomized Response Technik adaptieren. Gleich bleibt immer der Anspruch, durch ein vorgespanntes Zufallsexperiment das Vertrauen in die Anonymität der Umfrage zu maximieren, um keine Verzerrung des Umfrageergebnisses durch nicht wahrheitsgemäße Antworten zu erhalten.

3.5 Bemerkungen zur Güte des ermittelten Schätzwertes

Natürlich ist nicht ausgeschlossen, dass es auch bei einer RRT-Umfrage Falschantworten gibt, jedenfalls ist aber mit wesentlich weniger Falschantworten zu rechnen als bei der direkten Befragung. Um diesen vorteilhaften Effekt zu erzielen, müssen aber auch zwei Nachteile in Kauf genommen werden.

Durch das vorgeschaltete Zufallsexperiment wird die Anzahl der tatsächlich auf die Frage antwortenden Personen verringert, de facto wird also der Stichprobenumfang n der Umfrage reduziert (vgl. Abbildung 2 und Abbildung 3).
Die Abweichung eines in einer Umfrage erhobenen Schätzers vom wahren Wert des Parameters hängt grundsätzlich vom Umfrageumfang n ab. Je größer n, desto weniger groß ist die Abweichung. Das ist auch intuitiv einsichtig. Eine Reduktion des Stichprobenumfangs durch das vorgeschaltete Zufallsexperiment erhöht also die Variabilität des Schätzers.

Bei der RRT-Umfrage ist der Schätzer aber auch darüber hinaus eine vom Zufall beeinflusste Größe. Denn das vorgeschaltete Zufallsexperiment bestimmt in der praktischen Durchführung die Personenzahl, die jedenfalls mit Ja antwortet bzw. tatsächlich zur Beantwortung der Frage kommt. In den Berechnungen werden diese Zahlen mit Hilfe der Laplace Wahrscheinlichkeit ermittelt (vgl. Abschnitt 4.3). In der realen Durchführung der Umfrage und des Zufallsexperiments wird es aber mehr oder weniger große Abweichungen von diesem Wert geben. Weiterführende Ausführungen dazu, insbesondere durch Gegenüberstellung von experimentell ermittelten Ergebnissen in direkter Befragung und in RRT-Umfragen legt Krüger dar (2004, S.54).

Jedenfalls ist darauf zu achten, dass der durch das Zufallsexperiment verringerte Stichprobenumfang ausreichend groß bleibt, um die beiden Quellen für die Abweichungen der errechneten Raten vom tatsächlichen Wert des Parameters gering zu halten.

Art der Umfrage	Abweichung des erhobenen Schätzwertes vom wahren Wert des Parameters – Einflussfaktoren
Direkte Befragung	- Stichprobenumfang n der Umfrage - Hoher Anteil an Falschantworten
RRT-Umfrage	- Verringerter Stichprobenumfang n - Vorgespanntes Zufallsexperiment - Geringer Anteil an Falschantworten

Tabelle 1: Gegenüberstellung von Direkter Befragung und Randomized Response Technik

3.6 RRT im Stochastikunterricht

Der Vorteil der Anwendung der RRT-Umfrage in der Praxis ist klar. Aus weiteren gewichtigen Gründen handelt es sich auch um ein sehr gewinnbringendes Thema für Lernende – sowohl im schulischen Mathematikunterricht der Sekundarstufe 2 als auch in der Ausbildung von Lehramtsstudierenden. Im Folgenden werden die Argumente für die Behandlung dieser Umfragetechnik im Stochastikunterricht in Listenform zusammengefasst.

- Das Ausgangsproblem ist interessant, leicht verständlich und gut nachvollziehbar. Krüger (2004, S. 50) schlägt als Einstieg für die Arbeit mit Schülerinnen und Schülern ein Rollenspiel vor, in dem die peinliche Frage einmal direkt beantwortet werden soll und in einer zweiten Befragung die Antwort zuvor randomisiert wird. So können die Lernenden auch emotional in die Materie einsteigen und die Notwendigkeit bzw. die Effekte des Anonymisierens der Antwort nachempfinden.

- Grundlegende Ideen der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden wieder aufgegriffen und verknüpft. So sind neben dem frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff die Laplace-Wahrscheinlichkeit und auch der Erwartungswert (zur Vorausberechnung der erwarteten Gesamtanzahl der Ja-Antworten) im Spiel. Die verbale Erklärung der RRT, unterstützt durch die Darstellung in den Baumdiagrammen, haben vordergründig zum Ziel, das gedankliche Durchdringen der Umfragemethode zu fördern. Gleichzeitig geht es aber auch darum, das Verständnis der dabei vorkommenden, verflochtenen Basisbegriffe und Konzepte weiter zu entwickeln und zu festigen.

- Je nach Interessenslage der Lernenden bietet sich Raum für vielfältige Anwendungsfragen, aber auch für innermathematische Diskussionen. Beispielsweise können sich um die (oben bewusst nicht in den Vordergrund gerückte) Tatsache, dass in ein und demselben Baumdiagramm einerseits Laplace-Wahrscheinlichkeiten (theoretischer Ansatz) andererseits Anteile, die sich aus der Stichprobe ergeben (empirischer Ansatz), als „Pfadwahrscheinlichkeiten" auftreten, vielfältige Fragen ranken.

- Den Aspekten des Begriffs Zufalls kommt eine zentrale Rolle zu, da sowohl Lehrende als auch Lernende gar nicht umhin kommen, sich damit auseinanderzusetzen. Konkret sind das folgende Punkte:
  - Die Umfrage selbst muss ein Zufallsexperiment sein.
  - Der wichtige Aspekt, der in Abschnitt 3 betonten, wiederholten Durchführung des Zufallsexperiments (hier repräsentiert durch die einzelnen Antworten der Befragten), um die Gesetzmäßigkeiten des Zufalls überhaupt nutzen zu können, rückt automatisch in den Fokus. Immerhin ist die Größe des Umfanges n der Umfrage entscheidend, um die RRT überhaupt anwenden zu können.
  - Nicht nur die erwünschten Auswirkungen des eingesetzten Zufallsexperiments sind in ihrem Ausmaß vom Zufall beeinflusst, sondern auch die Nachteile davon. (vgl. Abschnitt 3.5).

4. Angemessene Grundvorstellungen

Weigand formuliert ohne Bezug auf konkrete Inhalte allgemein für das Lernen von Mathematik: „Damit mathematische Begriffe flexibel angewendet, in Problemlöseprozessen adäquat eingesetzt und auf neue Situationen übertragen werden können, müssen tragfähige Vorstellungen bei Lernenden ausgebildet werden. Diese Vorstellungen entwickeln sich aus der Beschäftigung oder aus Handlungen mit Begriffen in verschiedenen Darstellungsformen und Umweltsituationen und werden als Grundvorstellungen bezeichnet.“ (Weigand 2015, S.262)

Gerade auf dem Gebiet der Stochastik ist es eine besondere Herausforderung, eine tragfähige, adäquate Vorstellung der Grundbegriffe aufzubauen. Die Gründe hierfür wurden in den Abschnitten 1 und 2 erläutert. An dieser Stelle greife ich nun noch die meines Erachtens wesentlichen Punkte auf, warum diese oft geforderten angemessenen Grundvorstellungen von so zentraler Bedeutung sind.

Da ist zunächst das ohnehin Naheliegende zu nennen: Sie sind absolut unerlässlich als Basis zum Erfassen der weiteren Konzepte der Stochastik, insbesondere der beurteilenden Statistik. Konkrete Probleme, die z.B. beim Testen von Hypothesen auftreten können, wenn einseitiges oder nicht fachlich fundiertes Verständnis der Grundbegriffe[7] vorliegt, werden beispielsweise in Hauer-Typpelt (2010), S. 76 aufgezeigt.
In der fachdidaktischen Literatur wird seit langem gefordert, dass Grundlagen der Stochastik frühzeitig gelegt werden müssen: „Der Stochastikunterricht in der Sekundarstufe 2 muss auf einer sicheren intuitiven Grundlage aufbauen. Diese Grundlage sollte unbedingt in der Primar- und Sekundarstufe 1 gelegt werden“ (Tietze et al. 2002, S.170). Auch ich selbst habe diese Notwendigkeit in vielen Vorträgen und Fortbildungen für Lehrpersonen immer wieder thematisiert (vgl. z.B. Hauer-Typpelt 2010, S. 86).
Daher ist es als Versäumnis zu betrachten, dass in den aktuellen österreichischen Lehrplänen der Primarstufe und der Sekundarstufe 1 die Begriffe „Zufall“ und „Wahrscheinlichkeit“ nicht vorkommen und ein Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung erst in der Sekundarstufe 2 vorgesehen ist. Zu einem Zeitpunkt also, zu dem man oft gegen sich hartnäckig haltende Fehlvorstellungen (vgl. Abschnitt 2, unangemessene Primärintuitionen) ankämpfen muss.
Aktuell wird an der Überarbeitung der Lehrpläne sowohl der Primarstufe als auch der Sekundarstufe 1 gearbeitet und es bleibt zu hoffen, dass die seit Jahren bestehenden wissenschaftlichen Erkenntnisse zur Notwendigkeit der frühzeitigen stochastischen Grundbildung Eingang finden.

Der zweite wesentliche Punkt ist, dass angemessene Grundvorstellungen unabdingbar sind, um stochastische Situationen außerhalb des Mathematikunterrichts zu erkennen und in Folge richtig deuten und bewerten zu können. Dabei handelt es sich wohl um das erklärte Ziel jeglichen schulischen Mathematikunterrichts: Mathematisches Wissen und Können außerhalb des Mathematikunterrichts einsetzen und nutzen zu können. Nur dann kann von einem sowohl für den Einzelnen als auch für die Gesellschaft gewinnbringenden Mathematikunterricht die Rede sein.

---

7 Hier sind vorrangig die Grundbegriffe „Zufall“, „wahrscheinlich“ und „Erwartungswert“ gemeint.

5. Fazit und Abschluss: Wesentliche Aspekte eines gewinnbringenden Mathematikunterrichts

Die Diskussion um den „guten, gewinnbringenden" Mathematikunterricht ist eine sehr alte, sie würde weit mehr als eine Antrittsvorlesung füllen. Einige aus meiner Sicht dafür wesentlichen Aspekte sind in den vorangehenden Abschnitten schon mehr oder weniger explizit thematisiert worden. Sie werden nun abschließend zusammengefasst.

Zielorientierung:

Unterricht von der Grundschule bis zur Hochschule unterliegt immer gewissen, mehr oder weniger engen Vorgaben durch Curricula. Diese befreien Lehrende aber nicht davon, ihre Ziele von Unterricht genau zu überlegen, immer wieder zu überdenken und zu reflektieren. Das gilt nicht nur für die konkreten Lernziele einzelner Unterrichtseinheiten, sondern auch für mittel- und langfristige Ziele. Insbesondere für den schulischen Mathematikunterricht muss es im Sinne der Allgemeinbildung ein Ziel sein, Schülerinnen und Schüler zu befähigen, das Gelernte auch außerhalb des Unterrichts wiedererkennen und anwenden zu können.

Aufbau angemessener Grundvorstellungen und Bedeutung der Begriffsbildung:

Da dafür angemessene Grundvorstellungen und fundierte Begriffsbildung unverzichtbar sind, ist diesen beiden Punkten im Unterricht viel Raum zu geben. Das muss sich auch in der Aufteilung der Zeitressourcen widerspiegeln. Die vermeintliche Zeitersparnis durch zu schnelles Vorgehen beim Erarbeiten von Basisbegriffen führt oftmals zu Problemen in späteren Unterrichtsphasen, wenn Lernende am mangelnden Grundverständnis scheitern. Das soll aber kein Plädoyer sein, unabhängig von der Materie, immer langsam in eine neue Thematik einzusteigen, denn ein zu langsames Voranschreiten kann ebenso kontraproduktiv für die Motivation von Lernenden sein wie ein zu rasches. Es gilt also, Unterricht beruhend auf fachdidaktischen Erkenntnissen und der Komplexität der Materie angepasst vorzubereiten, und in weiterer Folge adäquat auf die Fortschritte der Lernenden zu reagieren und dementsprechend den Lernprozess zu steuern – eine große Herausforderung für Lehrende, der man sich mit jeder Gruppe von Lernenden aufs Neue stellen muss.

Ausgewogenes Maß zwischen Verständnisorientierung und Verfahrensorientierung:

Leider gelten in unseren Breiten Aussagen wie „Von Mathematik habe ich keine Ahnung." oder „Oje, Mathematik" beim ersten Erblicken eines Diagramms, einer Tabelle oder gar nur von ein paar Zahlen immer noch als salonfähig. Manchmal scheinen solche Aussagen geradezu in der Absicht eingesetzt zu werden, damit die Sympathien der Gesprächspartner zu gewinnen. Man ist also ziemlich davon überzeugt, mehrheitlich Zustimmung zur Ablehnung der Mathematik zu finden. Die Gründe dafür sind vielfältig, einer der wesentlichen ist mit Sicherheit die viel zitierte „Dressur des Unverstandenen". Die destruktive Kraft und Fehleranfälligkeit eines sinnentleerten Auswendiglernens liegt auf der Hand und lässt Mathematik leider auch zu oft zum Angstfach für Lernende werden. Daher muss Mathematik grundsätzlich verstehensorientiert unterrichtet werden, d.h. Mathematikunterricht muss so gestaltet werden, dass Lernende reale Chancen haben, Inhalte, Methoden und dahinter stehende Ideen gedanklich zu erfassen. Geht es um mathematische Verfahren, müssen diese natürlich im Anschluss ausreichend geübt werden, also auch der Verfahrensorientierung Rechnung getragen werden. Es besteht aber ein entscheidender Unterschied zwischen der Vorgangsweise, ein Rechenverfahren zu verstehen und durch Üben zu automatisieren, und der Vorgangsweise, ein Verfahren unverstanden auswendig zu lernen („Dressur des Unverstandenen“). Vordergründig scheinen Lernende zwar dasselbe zu machen, de facto führt rein auswendig Gelerntes (im Allgemeinen) nicht zu gesichertem Wissen und Können. Probleme und Scheitern spätestens bei zunehmendem Komplexitätsgrad sind vorprogrammiert. Auch die oben erläuterte Tragfähigkeit für den Aufbau weiterer Inhalte und Verfahren kann ohne vorangehendes Verständnis nicht erreicht werden.

Mathematik als Schule des Denkens

Dass Beschäftigung mit der Mathematik eine „Schule des Denkens“, insbesondere eine Schule des logisch-schlüssigen Denkens sei, ist eine seit der Antike überlieferte Überzeugung. Aussagen dazu reichen bis Platon zurück. Wenn sich auch seit dieser Zeit, das, was wir unter Mathematik verstehen, enorm weiterentwickelt hat, so bleibt gerade dieser Grundanspruch an den Mathematikunterricht, Schule des Denkens zu sein und rege Geister zu entwickeln, unverändert.

In der Ausbildung angehender Lehrerinnen und Lehrer ist es ein zentrales Ziel, Studierenden diese Grundideen, die idealerweise in einer Grundhaltung münden, nahezubringen. Dies soll einerseits durch Umsetzen der soeben zusammengefassten Ansprüche, unabhängig von den zu unterrichtenden mathematischen Inhalten, geschehen, andererseits auch durch intensive fachdidaktische Betrachtungen und Diskussionen auf der Metaebene. Denn in dieser Sache soll nichts dem Zufall überlassen bleiben!

6. Literatur

Bruder, Regina et al. (2015): *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Springer Spektrum. Berlin Heidelberg.

Büchter, Andreas et al. (2004): *Den Zufall im Griff – stochastische Vorstellungen fördern*. In: Praxis der Mathematik in der Schule. 47. Jg., Heft 4. Aulis Verlag.

Guckelsberger, Susanne und Schacht, Florian (2018): *Bedingt wahrscheinlich? Perspektiven für einen sprachbewussten Stochastikunterricht*. In: Mathematik Lehren. Heft 206. S.29-33

Hauer-Typpelt, Petra (2011): *Tragfähige Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln – Vorschläge für den Stochastikunterricht*. In: Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. Heft 43. S.75-87. Online-Ausgabe in Heft 42: www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/index.html

Hauer-Typpelt, Petra (2010): *Wahrscheinlichkeit, Zufall und Erwartungswert – und das alles aus einem Spiel?* In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. WTM-Verlag. Münster. S.381-384

Heymann, Hans Werner (2013): *Allgemeinbildung und Mathematik*. Beltz Verlag. Weinheim und Basel.

Krüger, Katja (2004): *Wahrheit oder Pflicht*. In: Mathematik Lehren. Heft 125. Friedrich Verlag. S.50-55

Riemer, Wolfgang (1993): *Das „Eins durch Wurzel aus n Gesetz" – Einführung in das statistische Denken auf der Sekundarstufe 1*. In: MNU, Jahrgang 46. Heft 5. S. 286-291

Tietze, Uwe-Peter et al. (2002): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Didaktik der Stochastik*. Vieweg Verlag. Braunschweig/Wiesbaden.

Warner, Stanley L. (1965): *Randomizes Response: A survey technique for eleminating evasive answer bias*. In: Journal oft he American Statistical Association. Vol. 60. S.63-69

Weigand, Hans-Georg (2015): *Begriffsbildung*. In: Handbuch der Mathematikdidaktik. Springer Spektrum. Berlin Heidelberg. S.255-278

Akademischer Werdegang von HS-Prof. Mag. Dr. Petra Hauer-Typpelt

Petra Hauer-Typpelt begann nach der Matura mit ausgezeichnetem Erfolg 1986 das Lehramtsstudium mit den Fächern Mathematik und Geographie an der Universität Wien. 1991 schloss sie das Studium durch Ablegen der zweiten Diplomprüfung mit ausgezeichnetem Erfolg ab. Die Diplomarbeit mit dem Titel „Einführung in die lineare Regression: Theoretische und anwendungsorientierte Aspekte“ wurde von Univ.-Prof. Dr. H.-C. Reichel betreut. Im Schuljahr 1991/92 begann sie ihre Unterrichtstätigkeit am Gymnasium Kundmanngasse in Wien. Parallel dazu nahm sie im Wintersemester 1992/93 das Doktorratsstudium Mathematik an der Universität Wien auf, das sie 1998 abschloss. Die Dissertation mit dem Titel „Zugänge zur Normalverteilung und ihre fachdidaktische Analyse“ wurde von Univ.-Doz. Dr. G. Hanisch betreut.

Unterbrochen von der Elternkarenz anlässlich der Geburt ihrer beiden Kinder unterrichtete sie weiterhin am Gymnasium. 2002 begann sie an der Pädagogischen Akademie in Wien Strebersdorf halbbeschäftigt in der Lehrer*innenausbildung zu arbeiten. Von 2004 bis 2006 war sie Sachverständige in der Gutachterkommission für Unterrichtsmittel des BM für Bildung, Wissenschaft und Kultur. Diese Arbeit beendete sie, um im Anschluss selbst als Schulbuchautorin tätig zu werden.

2005 wechselte sie an die Universität Wien und war bis 2011 wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Fakultät für Mathematik. Auch in dieser Zeit war sie weiterhin halbbeschäftigt am Gymnasium tätig, absolvierte im Studienjahr 2007/08 die Ausbildung zur Betreuungslehrerin und betreute in Folge Studierende im fachbezogenen Praktikum.

Von 2010 bis 2012 war sie Mitarbeiterin in dem die Zentralmatura Mathematik entwickelnden Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung Mathematik“ des österreichischen Kompetenzzentrums für Mathematikdidaktik der Universität Klagenfurt. In diesem Zusammenhang intensivierte Sie Ihre Tätigkeit in der Lehrer*innenfortbildung, die sie schon zuvor insbesondere zu den Themenbereichen Stochastik und Spieltheorie durchführte.

2011 begann sie an der KPH Wien/Krems zu arbeiten, ab 2013 in Vollbeschäftigung. Seit 2015 ist sie Sprecherin der Fachgruppe Mathematik an der KPH. In dieser Funktion war sie Mitglied verschiedener Curricularkommissionen und hatte insbesondere an der Curriculumsentwicklung des Schwerpunktes Mathematik der neuen Primarstufenausbildung hohen Anteil. 2016 erhielt sie den Preis der Lehre an der KPH. Neben der Lehre sowohl an der an der Universität Wien (im Rahmen des Verbundes Nord-Ost) als auch an der KPH Wien bilden Vortrags-, Publikations- und Entwicklungstätigkeit die Schwerpunkte ihrer Arbeit. Seit September 2018 ist Petra Hauer-Typpelt Hochschulprofessorin ph1 für Mathematikdidaktik der Sekundarstufe an der KPH Wien/Krems.

Ausgewählte Publikationen von HS-Prof. Mag. Dr. Petra Hauer-Typpelt

Hauer-Typpelt, P. und Ableitinger, C. (2020): *Die Katze im Sack kaufen? Spieltheoretische Modelle zum Umgang mit Risiken.* In: Mathematik Lehren. Heft 220. S. 25-29

Hauer-Typpelt, P. (2018): *Spieltheoretische Experimente im Klassenzimmer 1: Ursprung und Erhalt von Kooperation.* In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Für die GDM herausgegeben von der Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn. Münster. WTM-Verlag. S. 739-742

Hauer-Typpelt, P. und Ableitinger, C. (2018): *Einblicke in die experimentelle Spieltheorie.* In: MU. Der Mathematikunterricht. Heft 1/2018. S. 4-14

Hauer-Typpelt P. (2017): *MFU – ein Kurs zur Förderung mathematischer Begabung von 10-14 Jährigen.* In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. Heft 49. S.33-44

Hauer-Typpelt P. und Benischek I. (2017): *Mathematische Bildungsstandards. Kompetent aufsteigen. Was 14-jährige Schülerinnen und Schüler in Mathematik können sollen.* G&G Verlag. Wien.

Hauer-Typpelt P. (2013): *Entwickeln von Grundkompetenzen als Herausforderung im Mathematikunterricht.* In: Greefrath, G., Käpnick F., Stein M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. WTM-Verlag. Münster. S.424-427

Hauer-Typpelt (2011): *Tragfähige Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln – Vorschläge für den Stochastikunterricht.* In: Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Heft 43 (2011). S.75-87. Online-Ausgabe in Heft 42: www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/index.html

Hauer-Typpelt P. (2009): *Stochastik und Analysis verzahnt in der Lehrer(innen)bildung am Beispiel Fehlerverteilung.* In: Stochastik in der Schule. Band 29 (2009) Heft 3. S.2-8

Hauer-Typpelt P. (2009): *Realitätsnahe Entscheidungssituationen modellieren und analysieren.* In: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Schriftenreihe der Istrongruppe, Band 14 (2009). S.67-81

Hauer-Typpelt P. (2006): *Auf experimentell-heuristischem Weg zur Normalverteilung.* In: Stochastik in der Schule, Band 26 (2006) Heft 3. S.2-10

HS-Prof. Mag. Dr. Petra Hauer-Typpelt

Ausgehend vom Begriff Zufall im Spannungsfeld zwischen Verständnis im alltäglichen Sprachgebrauch und mathematischem Begriffsverständnis werden Einblicke in das Lehren und Lernen im Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie, der Lehre der Gesetzmäßigkeiten des Zufalls, gegeben. Anhand des konkreten Beispiels der Randomized Response Umfragetechnik wird die Vielschichtigkeit des Begriffs Zufall diskutiert. Darauf basierend werden einige grundlegende Aspekte des Lehrens und Lernens von Mathematik, insbesondere die Bedeutung des Entwickelns angemessener Grundvorstellungen thematisiert.

ISBN 978-3-904046-04-6

9 783904 046046